TENTAMEN I MATEMATISK ANALYS TMV139

Fredag 20 augusti 2021 kl 8.30 – 12.30

Examinator: Johan Berglind

Tillåtna hjälpmedel: alla utom mänsklig assistans.

Betygsgränser: 20 – 29 poäng ger betyg 3, 30 – 39 poäng betyg 4, 40 poäng eller mer betyg 5

Bonus från duggor läsperiod 2 hösten 2020 räknas med.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar lämnas.

1. Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}$ **(3p)**

2. Låt *n* vara ett positivt heltal. Visa att $1 > \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{2n}} \geq \frac{\pi}{4}$ **(4p)**

3. Låt *x* vara ett tal mellan 0 och 1. Beräkna $\int_0^1 |t-x| dt$ **(5p)**

4. Beräkna summan av följande serie:
   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n-1}}$ **(3p)**

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y' = 2 + e^y$ **(6p)**

6. Bestäm alla *x* för vilka serien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n^2+1}$ konvergerar. **(5p)**

7. Låt $f(x) = \sin x \cos x \, e^x$.

   Bestäm $f'''(0)$ genom att använda Maclaurinutvecklingar. **(5p)**

8. Antag att $f'(x) = \frac{\cos x}{x}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = b$.

   Bestäm $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$. *(a och b är godtyckliga tal)* **(6p)**

9. Det begränsade området mellan kurvorna $y = x^2$ och $y = 4$ delas i två delar av linjen $y = b$ där *b* är ett tal mellan 0 och 4.
   Bestäm *b* så att de två delarna får samma area. **(6p)**

10. Bestäm alla deriverbara funktioner $f(x)$ i första kvadranten med följande egenskap: Normalen till kurvan $y = f(x)$ i en punkt $\left(a, f(a)\right)$ skär x-axeln i punkten $(2a, 0)$

    $f(x)$ skall vara definierad för alla positiva tal. **(7p)**